Prof. Dr. Julian Scheuer
Goethe Universität
Institut für Mathematik
Robert-Mayer-Str. 10, Raum 803
+49 (0) 69 786 22568
60325 Frankfurt am Main
scheuer@math.uni-frankfurt.de

Seminarankündigung SoSe 2023

Einführung in die Geometrische Maßtheorie

Zeit und Ort: Mi, 14-16 Uhr, Hörsaaltrakt Bockenheim H5
Sprechstunde während der Vorlesungszeit: Di, Mi, Do 13:15 - 14 Uhr

Anmeldung. Um am Seminar teilnehmen zu können, sind zwei Aktionen notwendig:

- Bitte in OLAT in den Kurs eintragen.
- E-Mail an scheuer@math.uni-frankfurt.de mit folgenden Angaben:
  - Name
  - Matrikelnummer
  - Interesse an darauf folgender Abschlussarbeit?
  - Können Sie innerhalb der ersten drei Wochen vortragen? (das würde bedeuten, dass Ihre Vorbereitung während der vorlesungsfreien Zeit beginnt.) Die ersten drei bis vier Wochen behandeln Teile der ersten beiden Kapitel aus [1].

Vortragsorganisation. Um es den Teilnehmer(inne)n zu ermöglichen, sich sowohl intensiv mit den Grundlagen (z.B. Hausdorff-Maß), als auch mit einer Anwendung (z.B. Fraktalen), werden entgegen dem üblichen Seminarprozedere von allen jeweils zwei 45-minütige Vorträge gehalten. Einer während der ersten paar Semesterwochen, der zweite später. Diese Regelung ist noch vorbehaltlich der endgültigen Zahl an Teilnehmer(inne)n.

Kurzzusammenfassung. Dieses Seminar kann als Fortsetzung der Vorlesung "Integrationstheorie" betrachtet werden und wir beschäftigen uns mit ausgewählten Themen der Maßtheorie, hin und wieder mit geometrischem Fokus. Erstes zentrales Objekt, das wir besprechen wollen, ist das s-dimensionale *Hausdorff-Maß* $\mathcal{H}^s$ im $\mathbb{R}^n$, wobei s eine positive Zahl ist. Im Gegensatz zum n-dimensionalen Lebesgue-Maß kann das Hausdorff-Maß auch niedrigdimensionale Mengen auf sinnvolle Art messen, die Lebesgue-Maß gleich null haben. Zum Beispiel ist für eine Hyperfläche Σ die Restriktion von $\mathcal{H}^{n-1}$ auf Σ einfach das in der Integrationstheorie besprochene Oberflächenmaß. Wir werden mittels des Hausdorff-Maßes für Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ einen Dimensionsbegriff einführen. Ist die Dimension einer Teilmenge nicht ganzzahlig, so sprechen wir von einem *Fraktal*. Fraktale sind interessante mathematische Objekte, die mitunter eine gewisse ästhetische Schönheit mitbringen. Man kann mit einer Internetsuche schonmal vorab einen ersten Eindruck gewinnen. Ausgehend von dem Hausdorff-Maß werden wir noch weitere ausgewählte Themen besprechen; einige Stichworte sind *Flächen- und Koflächenformel*, *mittlere Krümmung und Minimalflächen* und *Varifaltigkeit*. Je nach Hörer(innen)schaft ist die Themenauswahl aber durchaus flexibel.

Zielgruppe und Anrechenbarkeit. Das Seminar richtet sich an Studierende im Bachelor- und Masterstudiengang, die es im Rahmen eines Vertiefungs- bzw. Spezialisierungsgebietes belegen wollen. Besonders zu empfehlen ist es, das Seminar in Kombination mit einer oder beiden der parallel angebotenen Vorlesungen "Analysis auf Mannigfaltigkeiten" (Prof. Bernig) oder "Lineare Partielle Differentialgleichungen" (Prof. Weth) zu besuchen. Bei Interesse ist auf dem Seminarthema aufbauend im Anschluss eine Bachelor- oder Masterarbeit möglich. In folgenden Modulen kann das Seminar angerechnet werden, was bei der Themenvergabe berücksichtigt wird.

- BaM-DG: Differentialgeometrie (bzw. Geometrische Analysis MaM-GA im Master)
- BaM-DGDS: Differentialgleichungen und dynamische Systeme
- BaM-PDGL: Partielle Differentialgleichungen (bzw. MaM-FPD im Master)

- BaM-FA: Funktionalanalysis

Voraussetzungen.

- Analysis I-II, Integrationstheorie, Lineare Algebra I

Literatur. Die Grundlagen (insbes. Hausdorff-Maß, sowie Flächen- und Koflächenformel) werden mit dem Buch von Evans/Gariepy [1] abgedeckt. Der Teil über Fraktale wird durch Abschnitte aus dem Buch von Falconer [2] behandelt. Hin und wieder kommt evtl. auch [3] zum Einsatz.

Notenvergabe. Die individuelle Note ergibt sich aus den jeweiligen Vorträgen.

Literatur

1. Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, revised ed., Studies in advanced mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.
2. Kenneth Falconer, *Fractal geometry*, 3. ed., Wiley, 2014.
3. Leon Simon, *Introduction to geometric measure theory*, Australian National University, Canberra, 1983, https://web.stanford.edu/class/math285/ts-gmt.pdf.