MAGISCHE MATHEMATIK - MATHEMATISCHE KARTENTRICKS UND IHR HINTERGRUND – XV. FREIBURGER MATHEMATIK-TAGE AM 14.10.16

Die Beschreibung des folgenden Tricks ist angelehnt an das Buch [1].

1. Jordan's Kartentrick

Folgender Trick wird dem Publikum vorgeführt:

• Ein Kartendeck wird einem Zuschauer gegeben (Bilder nicht sichtbar), der einen Teil der Karten abhebt und die beiden entstehenden Kartenblöcke vertauscht.

• Der Zuschauer reicht das Deck an einen anderen Zuschauer weiter, der ebenfalls abheben soll. Dies wird dann mit drei weiteren Zuschauern wiederholt, wir haben also 5 involvierte Zuschauer.

• Nun nimmt der 5. Zuschauer die obere Karte, gibt das Deck dem 4. Zuschauer zurück, der die nächste Karte nimmt und so weiter bis zum ersten Zuschauer.

• Nun bitte ich die 5 Zuschauer mit Karte aufzustehen, falls sie eine rote Karte haben.

• Ich sage daraufhin voraus, wer welche Karte hat.

2. Zugrunde liegende Mathematik

2.1. De Bruijn-Folgen.

2.1. **Definition.** Sei $k \in \mathbb{N}$. Eine endliche Folge (x_i) in $\{0,1\}$ heißt *de Bruijn-Folge der Länge* 2^k, falls jedes k-Tupel $(i_1, \ldots, i_k)$, $i_j \in \{0,1\}$, genau einmal in (x_i) vorkommt, wobei man die Stellen x_{2^k-j}, $j < k$, zu berücksichtigen hat, indem man die dort beginnenden Tupel mit den Anfangsstücken der Folge auffüllt.

2.2. *Beispiel.* Versuchen Sie, de Bruijn-Folgen für $k = 3$ und $k = 4$ zu konstruieren.

Lösung: Zum Beispiel ist für $k = 3$

$$00011101$$

eine De Bruijn-Folge. Für $k = 4$ haben wir z.B.

$$0000111101100101.$$

Die obigen Folgen wurden mit Hilfe des sogenannten "Greedy-Algorithmus" erstellt, das heißt, man beginnt mit k Nullen und fügt dann in jedem weiteren Schritt eine 1 hinzu, sofern dies möglich ist (d.h. solange man damit kein k-Tupel erzeugt, das schonmal da gewesen ist.)

2.3. *Beispiel.* Erzeugen Sie mit Hilfe des Greedy-Algorithmus eine de Bruijn-Folge für $k = 5$.

Lösung:

$$00000111110111001101011000101001.$$

2.4. *Bemerkung.* Man kann mit Hilfe von Graphentheorie zeigen, dass es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine de Bruijn-Folge der Länge 2^k gibt. Ferner kann man beweisen, dass man eine solche mit Hilfe des Greedy-Algorithmus findet. Allerdings ist die Folge nicht eindeutig, wie wir bald sehen werden.

2.2. **Der Trick am Beispiel von acht Karten.** Nachdem wir nun die de Bruijn-Folgen kennengelernt haben, ist es leicht möglich, die Idee des Jordan-Tricks zu verstehen. Wir tun dies am Beispiel von $2^3 = 8$ Karten. Wie kann man also die Existenz einer de Bruijn-Folge der Länge 8 ausnutzen? Wir hatten hier die Sequenz

$$00011101$$

betrachtet. Diese enthält die 8 verschiedenen Tripel (von links nach rechts)

$$000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100. \tag{2.1}$$

Hat man 8 Karten, z.B. alle Asse und 8er, so kann man jedem einzelnen Tripel genau eine Karte zuordnen. Im Prinzip ist es egal, wie man jede Karte belegt, man sollte sich das eigene System aber merken können. Einem Tripel kann man z.B. nach folgendem Schema Karten zuordnen:

• Die erste Ziffer kodiert die Farbe:

$$0 \to \text{schwarz}$$

$$1 \to \text{rot}$$

• Die ersten beiden Ziffern bestimmen die Kategorie:

$$00 \to \text{Kreuz}$$

$$01 \to \text{Pik}$$

$$10 \to \text{Karo}$$

$$11 \to \text{Herz}$$

• Die letzte Ziffer bestimmt, ob man eine 8 oder ein Ass hat, z.B. $0 \to 8$ und $1 \to$ Ass. Z.B. ist also 010 eine Pik-8.

2.5. *Beispiel.* Übersetzen Sie die Tripel in (2.1) nach obigem Schema in die zugehörigen Karten.

Lösung: Die Folge (2.1) übersetzt sich zu

Kreuz-8, Kreuz-Ass, Pik-Ass, Herz-Ass, Herz-8, Karo-Ass, Pik-8, Karo-8.

Genau so muss man die Karten vor dem Trick anordnen, natürlich ohne das dem Publikum zu sagen.

Der Clue ist nun, dass Abheben das Schema nicht ändert, da der Übergang vom rechten Ende der de Bruijn-Folge zum linken mit eingerechnet ist. D.h. Abheben liefert die gleiche Folge, nur dass man mit einer anderen Stelle startet (man Stelle sich die Karten im Kreis ausgelegt vor).

• Der ausführende ist dann in der Situation, dass er von drei Zuschauern erfährt, in welcher Reihenfolge rot und schwarz auftauchen, z.B. erhält er die Information "rot-schwarz-schwarz", d.h. 100. Dieses Tripel findet man in der de Bruijn-Folge, wenn man an der letzten Stelle startet, s.o. Man weiß also, dass der erste Zuschauer eine $100 = \text{Karo} - 8$, der zweite eine $000 = \text{Kreuz} - 8$ und der dritte ein $001 = \text{Kreuz} - \text{Ass}$ hat.

2.3. **Modulo-Rechnung.** Man sieht am obigen Beispiel mit 8 Karten, dass man sich irgendwie die de Bruijn-Folge merken muss, zum einen um die Zuschauerinformation exakt in der Folge zu lokalisieren, als auch um die folgenden Tripel zu finden. Bei 8 Karten kann man die Folge noch leicht auswendig lernen. Wenn man ein richtiges Kartenspiel verwenden will (mind. $2^5 = 32$ Karten), wird das schnell unübersichtlich. Es gibt für 31 (wir sehen später, warum 31) Karten eine einfache Methode, die nächste Ziffer herzuleiten. Hierfür müssen wir aber zunächst verstehen, wie man "modulo" rechnet. Es ist ganz einfach: Das Symbol

$$n \mod m$$

bezeichnet den Rest bei Division von n durch m. Z.B.

$$8 \mod 3 = 2,$$

$$13 \mod 5 = 3$$

oder auch

$$4 \mod 4 = 0.$$

Wir benötigen lediglich $\mod 2$-Rechnung. Ferner addieren wir nun Nullen und Einsen. Folgende Tabelle gibt alle Möglichkeiten für $\mod 2$

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 = 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.4. **Ein Algorithmus für 31 Karten.** Mit folgendem Algorithmus erhält man eine De Bruijn-Folge der Länge 31 mit 5-Tupeln. Gegeben sei ein 5-Tupel, das nicht nur aus Nullen besteht.

Man erhält die nächste Ziffer, indem man die erste und dritte modulo 2 addiert.

Z.B. hängt man an

$$01001$$

eine 0 ran (erste + dritte Stelle mod 2) und erhält

$$010010.$$

Nun vergisst man die erste Null, verfährt analog mit

$$10010$$

und erhält eine 1.

• Vervollständigen Sie die Folge.

Lösung: 01001011001111100011011101010000.

Bis auf Abheben erhält man immer die gleiche Folge. Man sieht, dass man das Tupel 00000 nicht bekommen kann, da man sonst nur Nullen bekäme. Damit muss eine Karte aus dem Spiel genommen werden (die zur 00000 gehört.)

In heutigem Trick habe ich wie folgt kodiert:

• Die erste Ziffer bestimmt die Farbe:

$$0 \to \text{schwarz}$$

$$1 \to \text{rot}$$

• Die ersten beiden Ziffern bestimmen die Kategorie:

$$\begin{gathered} 00 \to \text{Kreuz} \\ 01 \to \text{Pik} \\ 10 \to \text{Karo} \\ 11 \to \text{Herz} \end{gathered}$$

• Die letzten drei Ziffern bestimmen die Karte exakt:

$$\begin{gathered} 000 \to 7 \\ 001 \to 8 \\ 010 \to 9 \\ 011 \to 10 \\ 100 \to \text{Bube} \\ 101 \to \text{Dame} \\ 110 \to \text{Koenig} \\ 111 \to \text{Ass.} \end{gathered}$$

Somit muss welche Karte aus dem Spiel genommen werden? (Kreuz-7).

Der Trick erfolgt nun wie oben. Die Zuschauerinformation (also ein 5-Tupel) sagt mir die erste Karte. Nun kann ich die nächste Ziffer ausrechnen ($1 + 3 \mod 2$), erhalte ein neues 5-Tupel und somit eine neue Karte, usw.

Viel Spaß beim Ausprobieren!

Literatur

[1] Persi Diaconis and Ron Graham, *Magical mathematics*, Princeton University Press, 2012.